

# Ликвидность и Теория Инвариантности

проф. Анна А. Обижаева

Российская Экономическая Школа (РЭШ)

Пермь  
4 февраля 2017

# Ликвидность и Финансовые Рынки

- Финансовые рынки предоставляют участникам рынка платформу, где они обмениваются рисками.
- Услуга трансфера риска не является бесплатной.  
Ликвидность - это мера платы за данную услугу (fees, spread, price impact, resilience).
- Транзакционные издержки, маржинальные требования, репо haircuts.

# Ликвидность и Финансовый Кризис

- Вопросы ликвидности стали особенно актуальны во время 2008-2009.
- Неликвидные активы и ликвидные пассивы банков.  
Несостоятельность банков или неликвидность активов?
- Отток финансирования часто приводит к ликвидации неликвидных активов по дисконтным ценам, цепной реакции, потенциально contagion и коллапсу банковской системы. Разногласие в оценках ликвидности активов может осложнить работу рынка рефинансирования.
- Как можно оценивать ликвидность и управлять ей (в дополнение к capital & leverage requirements)

# Реформы по ликвидности -I

Basel III - *минимальные* требования к ликвидности (например, более высокие требования в США):

- **LCR (liquidity coverage ratio)** - достаточность ликвидных активов для покрытия 30-дневного оттока финансирования.

$$\frac{HQLA(assets / haircuts)}{30 - dayNetOutflow} > 100\%$$

## Реформы по ликвидности -II

Basel III - *минимальные* требования к ликвидности (например, более высокие требования в США):

- **NSFR (Net Stable Funding Ratio)** - достаточность долговременного финансирования (available stable funding) для покрытия активов при их “ликвидации” с учетом дисконта ликвидности (required stable funding).

Менее рискованные активы меньше нуждаются стабильном финансировании и имеют небольшой фактор RSF. Менее стабильное финансирование имеет меньший вес ASF.

**Комментарий: В формулах много “защитых” весов, связанных с ликвидностью. Оптимальность?**

# Либо Эффективность Либо Надежность

- Более эффективное использование капитала (меньше буфер капитала, дешевое финансирование и инвестирование в более “прибыльные” неликвидные активы) приводит к ускорению роста экономики и большим прибылям в финансовом секторе.
- Но также делает систему менее устойчивой к шокам и внутренним дисбалансам (ошибки при инвестициях в неправильные сектора) и приводит к системным рискам.
- Приватизация прибыли и национализация убытков (risk shifting) ведет к необходимости регулирования финансового сектора (в интересах налогоплательщиков)

Чем больше мы знаем о ликвидности и изучаем нашу экономику, тем легче найти оптимальную точку в этом trade-off.

# Данные

- **Мониторинг** - сбор агрегированных первоначальных данных (концентрация по кредиторам, валютам, датам). Дальнейшая проверка и анализ данных регуляторами, анализ общей макро-стабильности.

# Микроструктура Рынка

- область финансов, изучающая ликвидность.

- Теория (теория игр, информационная экономика) и эмпирика (мало качественных исследований по России);
- Кто занимается изучением ликвидности?
- Практики (asset managers, traders), регуляторы, сотрудники бирж и ученые.
- Микроструктура как часть финансовой экономики; эконофизика; математика, статистика и исследование операций/engineering.

# Ликвидность

- Ликвидность имеет разные аспекты: спред/spread для маленьких транзакций, глубина рынка/market depth для больших транзакций, релаксация/resilience для транзакций во времени.
- Отсутствие общепризнанных моделей и определений. Например, издержки на \$1-транзакцию, на 1%ADV, на 1% капитализации, на среднюю транзакцию? в долларах или % или в единицах волатильности?
- Постоянный и временный ценновые эффекты, permanent and temporary impact.
- Различные market frictions могут влиять на рынок.

# Формула для издержек %Cost

Издержки % Cost = F(параметры рынка - объем, вола,...; размер заявки; скорость исполнения,...);

- оценки функций для каждого инструмента или сегмента рынка по отдельности;
- ad hoc общие оценки (Barra model, работы Almgren et al);
- инвариантность микроструктуры рынка (Kyle and Obizhaeva) внутренне непротиворечивые формулы, теоретически обоснованные и зависящие от всего нескольких констант.

Эти наработки могут быть использованны для настройки регулятивных правил и стресс-тестов, но необходимы дальнейшие исследования.

## Основная Проблема - Low Stat Power

Предположим, что 1% ADV двигает цену на 20 bps, а дневная волатильность 200 bps. Заявка объясняет только 1% returns variance. При правильно выбранной модели R squared будет равен 1%!

Для оценки необходимо много наблюдений об исполнении очень больших заявок.

# Основная Проблема - Selection Bias

Обычно функцию транзакционных издержек сложно оценить, так как оценки обычно смещены из-за корреляции между транзакциями и изменением цен.

Заявки удаляются, если цена изменяется в неподходящем направлении, и увеличиваются, если цена изменяется в благоприятном направлении. Так как самые дорогие заявки будут не исполнены, а самые дешевые будут исполнены, то есть издержки будут казаться небольшими.

## Barra Model, 1997

“Active Portfolio Management,” Richard Grinold and Ronald Kahn,  
Torre's model

$$\%Cost = \alpha_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{Q}{V}} + \%spread$$

$Q$  - объем позиции в контрактах

$V$  - средний дневной объем в контрактах

$\sigma$  - дневная волатильность в процентах

$\alpha_1 = 0.5$  (или  $\Delta P = 1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{Q/V}$  для изменения цен)

## Almgren Model, 2005

“Direct Estimation of Equity Market Impact,” R.Almgren at el.

$$\%Cost = \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot \sigma \cdot \frac{Q}{V} \cdot \left( \frac{cap}{V} \right)^{1/4} + \alpha_3 \cdot \sigma \left( \frac{Q}{V \cdot T_{liq}} \right)^{3/5}.$$

$Q$  - объем позиции в контрактах

$V$  - средний дневной объем в контрактах

$cap$  - капитализация в контрактах

$\sigma$  - дневная волатильность в процентах

$T_{liq}$  - время ликвидации

$\alpha_2 = 0.314$  и  $\alpha_3 = 0.142$ .

# Микроструктурная Инвариантность

“Market Microstructure Invariance,” Kyle & Obizhaeva, Econometrica, 2016.

- Все рынки похожи, но более ликвидные рынки имеют быстрое время, а менее ликвидные рынки имеют медленное время.
- Бизнес время связано со скоростью прибытия новых идей (bets). В бизнес времени все рынки идентичны (при отсутствии market frictions), то есть идентичны долларовые риск-трансферы  $\tilde{I}$  и долларовая плата за них  $C(I)$ ,

$$\tilde{I} = P \cdot \tilde{Q} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\gamma}}, \quad C(I).$$

- где цена актива  $P$ , дневная волатильность  $\sigma$ , количество заявок  $\gamma$  в день и их размер  $Q$ .

# Микроструктурная Инвариантность

- В календарном времени разные переменные (размер заявок, их количество, спред, глубина рынка, resilience) описываются разными степенными функциями от объема торгов и волатильности.

$$\gamma \sim (V \cdot P \cdot \sigma)^{2/3}$$

$$P \cdot Q \cdot \sigma \sim (V \cdot P \cdot \sigma)^{1/3}$$

- или

$$\frac{Q}{V} \sim (V \cdot P \cdot \sigma)^{-2/3}$$

## Доказательство

Риск-трансфер  $\tilde{I} := \frac{P \cdot \tilde{Q} \cdot \sigma}{\gamma^{1/2}}$  является инвариантом, а объем торгов  $V = E|\tilde{Q}| \cdot \gamma$ , поэтому получаем

$$\gamma \cdot E|\tilde{Q}| \cdot P \cdot \sigma = V \cdot P \cdot \sigma$$

и scaling laws для количества заявок в день  $\gamma$  и их размер  $Q$ :

$$\gamma \sim (V \cdot P \cdot \sigma)^{2/3}$$

$$P \cdot Q \cdot \sigma \sim (V \cdot P \cdot \sigma)^{1/3}$$

# Инвариантность Микроструктуры Рынка

Оценка распределения размера заявок (bets). Заявки  $|\tilde{Q}|/V$  распределены приблизительно лог-нормально с лог-вариацией 2.53, а количество заявок в день  $\gamma$  определяется как

$$\ln \gamma = \ln 85 + \frac{2}{3} \ln \left[ \frac{V \cdot P \cdot \sigma}{(0.02)(40)(10^6)} \right].$$

$$\ln \left[ \frac{|\tilde{Q}|}{V} \right] \approx -5.71 - \frac{2}{3} \cdot \ln \left[ \frac{V \cdot P \cdot \sigma}{(0.02)(40)(10^6)} \right] + \sqrt{2.53} \cdot N(0, 1)$$

Например, для акции с дневной волатильностью 2%, ценой \$40, и дневным объемом млн акций, на рынке будет 85 bets, их медианный размер 0.33%ADV или \$132500, их среднее 1.17%ADV или \$469500, 1std 1.50%ADV. Покупки и продажи - симметричны.

# Инвариантность Микроструктуры Рынка

Оценка издержек  $\%Cost(V, P, \sigma, Q)$  для заявки  $Q$ :

- Linear price impact (ликвидация в естественном темпе):

$$\frac{\sigma}{0.02} \left( \frac{8.21}{10^4} \cdot \left[ \frac{V \cdot P \cdot \sigma}{(0.02)(40)(10^6)} \right]^{-1/3} + \frac{2.50}{10^4} \cdot \left[ \frac{V \cdot P \cdot \sigma}{(0.02)(40)(10^6)} \right]^{1/3} \frac{Q}{(0.01)V} \right).$$

- Sqrt price impact (ликвидация в естественном темпе):

$$\frac{\sigma}{0.02} \left( \frac{2.08}{10^4} \cdot \left[ \frac{V \cdot P \cdot \sigma}{(0.02)(40)(10^6)} \right]^{-1/3} + \frac{12.08}{10^4} \cdot \left[ \frac{Q}{(0.01)V} \right]^{1/2} \right).$$

Например, для акции с дневной волатильностью 2%, ценой \$40, и дневным объемом млн акций, исполнение 1%ADV будет иметь 2.50 bps price impact и 8.21 bps спред, всего 10.71 bps.

# Dimensional Analysis and Market Microstructure Invariance

Albert S. Kyle

University of Maryland

Anna A. Obizhaeva

New Economic School

# Overview

This paper combines **dimensional analysis**, **leverage neutrality**, and a principle of **market microstructure invariance** to derive scaling laws.

- Scaling laws relate transaction costs functions, bid-ask spreads, bet sizes, number of bets, and other financial variables in terms of dollar trading volume and volatility.
- These laws are tested using a data set of trades in the Russian stock market and find a strong support in the data.
- These scaling laws provide useful metrics for risk managers and traders; scientific benchmarks for evaluating issues related to high frequency trading, market crashes, and liquidity measurement; and guidelines for designing policies.

# A General Picture

The scaling laws in finance can be derived using different approaches:

- Empirical conjectures and tests: Kyle and Obizhaeva (2016).
- Derived results from a dynamic equilibrium model: work in progress.
- Physicists' approach: this paper.

# What Kind of Scaling Laws?

The microstructure invariance principles discussed in this paper are *not related* to power laws in the tails of probability distributions.

Instead, results describe log-linear relationships among microstructure variables related to dimensional consistency.

## Example: Square-Root Model of Price Impact

$$\text{TCost}_1 = Y_1 \cdot \sigma_{1/T}^{1/2} \cdot \left( \frac{Q_S}{V_{S/T}} \right)^{1/2}$$

Note that  $Y$  is the same constant for all assets

- TCost is dimensionless. All units of time and shares cancel so that right side is also dimensionless.
- This dimensional consistency is not shared by all models.
- What other models have such consistency?

# Dimensional Analysis

Physics researchers obtain powerful results by using dimensional analysis to reduce the dimensionality of problems (the size and number of molecules in a mole of gas, the size of the explosive energy, turbulence).

- **Physics:** fundamental units of mass, distance, and time & conservation laws based on laws of physics.
- **Finance:** fundamental units of time, currency, and shares & conservation laws based on no-arbitrage restrictions.

# Dimensional Analysis and Physics

What is the time of oscillation  $T$  of a pendulum? Time has units of seconds  $[s]$ . Suppose time  $T = f(M, L, g)$ :

- mass  $M$  is in  $[g]$ ,
- length  $L$  is in  $[m]$ ,
- gravity acceleration  $g$  is in  $[m/s^2]$ .

$$T = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot f(\text{dimensionless variables}) = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot f(\cdot) = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \text{const.}$$

Then, use the law of conservation of energy to find a constant.

# Dimensional Analysis and Finance

In financial markets, institutional investors trade by implementing speculative “bets” which move prices. A bet is a decision to buy or sell a quantity of institutional size.

Trading is costly; bets tend to move market prices.

## Transaction Costs

Let  $G_{jt} := g(Q_{jt}, P_{jt}, V_{jt}, \sigma_{jt}^2, C)$  denote the price impact cost as a fraction of the value traded  $Q_{jt} \cdot P_{jt}$ . The price impact  $G_{jt}$  is dimensionless, , e.g. in basis points, and it is a function of

- bet size  $Q_{jt}$  in units of shares  $[s]$ ,
- stock price  $P_{jt}$  in units of dollars per share  $[us^{-1}]$ ,
- share volume  $V_{jt}$  in units of shares-per-day  $[st^{-1}]$ ,
- volatility  $\sigma_{jt}^2$  in units of per-day  $[t^{-1}]$ ,
- bet cost  $C = E\{G_{jt} \cdot Q_{jt} \cdot P_{jt}\}$  in units of dollars  $[u]$ .

## Dimensional Analysis

Since the value of  $G_{jt} := g(Q_{jt}, P_{jt}, V_{jt}, \sigma_{jt}^2, C)$  is itself dimensionless, consistency of units implies that it cannot depend on the dimensional quantities  $P_{jt}$ ,  $Q_{jt}$ , and  $\sigma_{jt}^2$ .

Thus, *dimensional analysis* implies that the function  $g()$  can be further simplified by writing it as function of two dimensionless variables.

$$\begin{aligned} G_{jt} &= P_{jt}^0 \cdot Q_{jt}^0 \cdot (\sigma_{jt}^2)^0 \cdot f(\text{two dimensionless variables}) \\ &= f(\text{two dimensionless variables}). \end{aligned}$$

# Dimensional Analysis

There are three sets of distinct units and five dimensional quantities— $Q_{jt}$ ,  $P_{jt}$ ,  $V_{jt}$ ,  $\sigma_{jt}^2$ ,  $C$ .

Form two independent dimensionless quantities:

$$L_{jt} := \left( \frac{m^2 \cdot P_{jt} \cdot V_{jt}}{\sigma_{jt}^2 \cdot C} \right)^{1/3}, \quad Z_{jt} := \frac{P_{jt} \cdot Q_{jt}}{L_{jt} \cdot C},$$
$$L_{jt} := \left( \frac{us^{-1} \cdot st^{-1}}{t^{-1} \cdot u} \right)^{1/3}, \quad Z_{jt} := \frac{us^{-1} \cdot s}{u}.$$

where  $m^2$  is a dimensionless scaling constant.

## Dimensional Analysis

Thus, *dimensional analysis* implies that the function  $g$  can be further simplified by writing it as  $g(L_{jt}, Z_{jt})$ .

$$G_{jt} := g(L_{jt}, Z_{jt}).$$

## Leverage Neutrality

To refine the transaction cost model further, introduce a conservation law in the form of *leverage neutrality*.

This is closely related to Modigliani-Miller equivalence, the idea that a change in leverage—the ratio of firm's debt to firm's equity—does not affect the underlying economics of the risk transfer represented by a bet of  $Q_{jt}$  shares.

## Leverage Neutrality

Suppose the stock is levered up by a factor  $A$  (e.g.  $A = 2$ ) as a result of paying a cash dividend of  $(1 - A^{-1}) \cdot P_{jt}$  financed with cash or riskless debt.

- $Q_{jt}$  does not change, and trading volume  $V_{jt}$  does not change.
- the dollar cost of the bet  $C$  does not change either.
- the ex-dividend price of a share is  $A^{-1} \cdot P_{jt}$ .
- $\sigma_{jt}$  increases to  $A \cdot \sigma_{jt}$ .
- each share continues to have the same dollar risk  $P_{jt} \cdot \sigma_{jt}$ .

$L_{jt}$  changes to  $A^{-1} \cdot L_{jt}$  and  $Z_{jt}$  remains unchanged.

# Leverage Neutrality

Percentage cost  $G_{jt}$  of executing a bet of  $Q_{jt}$  shares changes by a factor  $A$ , since dollar cost did not change but dollar value changed.

Leverage neutrality implies that  $g(A^{-1} \cdot L_{jt}, Z_{jt}) = A \cdot g(L_{jt}, Z_{jt})$ .

For  $A = L_{jt}$ :

$$g(L_{jt}, Z_{jt}) = L_{jt}^{-1} \cdot g(1, Z_{jt}). \quad (1)$$

Then, if  $f(Z_{jt}) := g(1, Z_{jt})$ , we get a very **important formula**:

$$G_{jt} = \frac{1}{L_{jt}} \cdot f(Z_{jt}).$$

# Transaction Costs Model

A general specification for transaction costs functions consistent with the scaling implied by dimensional analysis and leverage neutrality:

$$g(Q_{jt}, P_{jt}, V_{jt}, \sigma_{jt}^2, C) = \left( \frac{\sigma_{jt}^2 \cdot C}{m^2 \cdot P_{jt} \cdot V_{jt}} \right)^{1/3} \cdot f \left( \left( \frac{\sigma_{jt}^2 \cdot C}{m^2 \cdot P_{jt} \cdot V_{jt}} \right)^{1/3} \cdot \frac{P_{jt} \cdot Q_{jt}}{C} \right).$$

It is consistent with different assumptions about the shape of the function  $f$ .

# Liquid Markets

Given the choice of a constant  $m^2$  such as  $E\{|\tilde{Z}_{jt}|\} = 1$ , the variables  $L_{jt}$  and  $Z_{jt}$  have an intuitive interpretation:

- $\frac{1}{L_{jt}} = \frac{C}{E\{P_{jt} \cdot |\tilde{Q}_{jt}|\}}$  is “**illiquidity index**” measuring average cost.
- $Z_{jt} = \frac{P_{jt} \cdot \tilde{Q}_{jt}}{E\{P_{jt} \cdot |\tilde{Q}_{jt}|\}}$  is “**scaled bet size**” relative to the average size.

More liquid markets are associated with more bets of larger sizes (2-to-1 ratio):

- Bet size  $E\{P_{jt} \cdot |\tilde{Q}_{jt}|\} = C \cdot L_{jt}$ .
- Number of bets per day  $\gamma_{jt} = \frac{\sigma_{jt}^2}{m^2} \cdot L_{jt}^2$ .

# Market Microstructure Invariance

Extra assumptions are necessary to make our predictions operational.

- Three of the quantities—asset price  $P_{jt}$ , trading volume  $V_{jt}$ , and return volatility  $\sigma_{jt}$ —can be observed directly or readily estimated from public data feeds.
- $Q_{jt}$  is a characteristic of a bet privately known to a trader.
- **Invariance:** the dollar value of  $C$  and the dimensionless scaling parameter  $m^2$  are the same!

These assumptions are related to bet size and transaction costs invariance hypotheses. Preliminary calibration gives  $C \approx \$2,000$  and  $m^2 \approx 0.25$ .

# Transaction Costs Models

Suppose  $f$  is a power function of the form  $f(Z_{jt}) = \bar{\lambda} \cdot |Z_{jt}|^\omega$ .

- A proportional bid-ask spread cost ( $\omega = 0$ ) implies

$$G_{jt} = \text{const} \cdot \frac{1}{L_{jt}}.$$

- A linear market impact cost ( $\omega = 1$ ) implies

$$G_{jt} = \text{const} \cdot \frac{P_{jt} \cdot |Q_{jt}|}{C \cdot L_{jt}^2}.$$

- A square-root market impact cost ( $\omega = 1/2$ ) implies

$$G_{jt} = \text{const} \cdot \sigma_{jt} \cdot \left( \frac{|Q_{jt}|}{V_{jt}} \right)^{1/2}.$$

# Liquidity

Our measure of liquidity is consistent in terms of units:

$$L_{jt} := \left( \frac{m^2 \cdot P_{jt} \cdot V_{jt}}{\sigma_{jt}^2 \cdot C} \right)^{1/3} \sim \left( \frac{P_{jt} \cdot V_{jt}}{\sigma_{jt}^2} \right)^{1/3}.$$

It is the correct way to construct empirical measure of Kyle's lambda.

## Illiquidity index and Amihud Measure

The linear price impact model in the spirit of Amihud (2002) and illiquidity measured as  $\sigma_{jt}/(P_{jt} \cdot V_{jt})$ :

$$G_{jt} = \text{const} \cdot \frac{\sigma_{jt}}{P_{jt} \cdot V_{jt}} \cdot P_{jt} \cdot |Q_{jt}|.$$

It is inconsistent unless the constant term has units equal to “per-square-root-of-time.” It is equivalent to our price impact model if the constant above is proportional to  $\gamma_{jt}^{1/2}$ .

Thinking about this measure as implementation of  $\lambda = \sigma_V / \sigma_U$  from Kyle (1985) requires dollar volume  $P_{jt} \cdot V_{jt}$  to be divided by  $\gamma_{jt}^{1/2}$  to make it proportional to the standard deviation of dollar order flow imbalances.

# Data

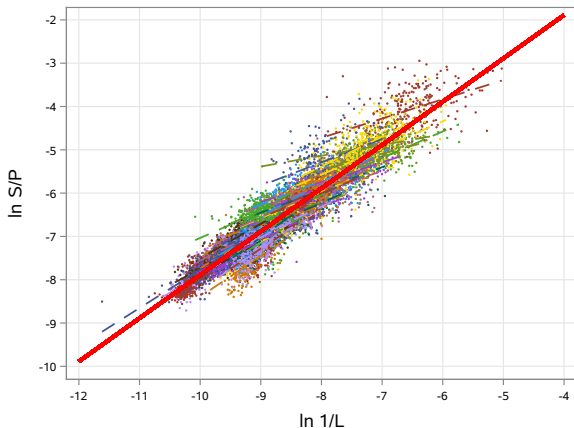
- One-minute data from the Moscow Exchange for January–December 2015 provided by Interfax Ltd.
- 50 Russian stocks in the RTS index as of June 15, 2015.
- The Russian stock market is centralized with all trading implemented in a consolidated limit-order book.
- Small tick and lot sizes.

## Tests for Bid-Ask Spread

Let  $S_{jt}$  denote the bid-ask spread. Then,

$$\log \left( \frac{S_{jt}}{P_{jt}} \right) = \text{const} + \mathbf{1} \cdot \log \left( \frac{1}{L_{jt}} \right).$$

## Spread: Results



In aggregate sample, the slope is close to 1! R-square is 0.876.

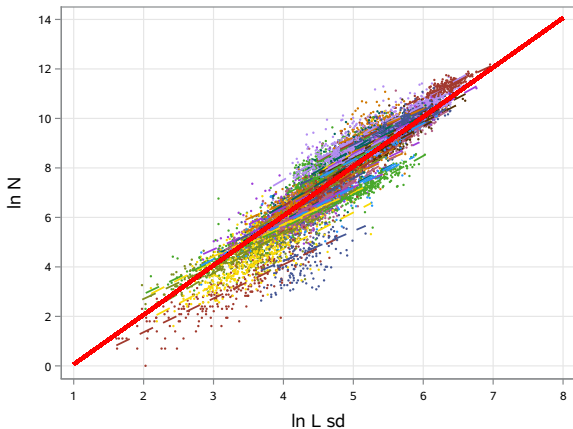
$$\log(S_{jt}/P_{jt}) = 2.093 + \mathbf{0.998} \cdot \log(1/L_{jt})$$

## Tests for Number of Trades

Let  $N_{jt}$  denote the number of trades and suppose  $N_{jt} \sim \gamma_{jt}$ . Then,

$$\log(N_{jt}) = \text{const} + 2 \cdot \log(\sigma_{jt} L_{jt}).$$

# Number of Trades: Results



In aggregate sample, the slope is close to 2! R-square is 0.882.

$$\log(N_{jt}) = -3.085 + 2.239 \cdot \log(\sigma_{jt} L_{jt})$$

## Extensions

The empirical implications of dimensional analysis, leverage invariance, and market microstructure invariance can be generalized to incorporate various trading **frictions**.

# Generalized Transaction Costs Formula

Add the **execution horizon**  $T_{jt}$  (in units of time), the **tick size**  $K_{jt}^{MIN}$  (in dollars per share), and the **lot size**  $Q_{jt}^{MIN}$  (in shares).

Re-scale variables to make them dimensionless and leverage neutral using the four variables  $P_{jt}$ ,  $V_{jt}$ ,  $\sigma_{jt}^2$ , and  $C$ :

- $\frac{|Q_{jt}|}{T_{jt}} \rightarrow \frac{|Q_{jt}|}{V_{jt} \cdot T_{jt}},$
- $K_{jt}^{MIN} \rightarrow K_{jt}^{MIN} \cdot \frac{L_{jt}}{P_{jt}},$
- $Q_{jt}^{MIN} \rightarrow Q_{jt}^{MIN} \cdot \frac{\sigma_{jt}^2 \cdot L_{jt}^2}{V_{jt}}.$

## Generalized Transaction Costs Formula

Here is the generalized formula with three more extra variables  $T_{jt}$ ,  $K_{jt}^{MIN}$ ,  $Q_{jt}^{MIN}$  added:

$$G_{jt} = \frac{1}{L_{jt}} \cdot f \left( \frac{P_{jt} \cdot Q_{jt}}{C \cdot L_{jt}}, \frac{|Q_{jt}|}{V_{jt} \cdot T_{jt}}, \frac{K_{jt}^{MIN} \cdot L_{jt}}{P_{jt}}, \frac{Q_{jt}^{MIN} \cdot \sigma_{jt}^2 \cdot L_{jt}^2}{V_{jt}} \right).$$

## Optimal Execution Horizon

Suppose the optimal execution horizon  $T_{jt}^*$  for an order of  $Q_{jt}$  shares depends on  $P_{jt}$ ,  $V_{jt}$ ,  $\sigma_{jt}^2$ ,  $C$ ,  $K_{jt}^{MIN}$ , and  $Q_{jt}^{MIN}$ .

Since  $|Q_{jt}|/(V_{jt} \cdot T_{jt}^*)$  is dimensionless and leverage neutral, the same logic implies:

$$\frac{|Q_{jt}|}{V_{jt} \cdot T_{jt}^*} = h^* \left( \frac{P_{jt} \cdot Q_{jt}}{C \cdot L_{jt}}, \frac{K_{jt}^{MIN} \cdot L_{jt}}{P_{jt}}, \frac{Q_{jt}^{MIN} \cdot \sigma_{jt}^2 \cdot L_{jt}^2}{V_{jt}} \right).$$

If tick size and lot size do not affect execution horizon,  $|Q_{jt}|/(V_{jt} \cdot T_{jt}^*)$  depends only on  $Z_{jt} := P_{jt} \cdot Q_{jt}/(C \cdot L_{jt})$ .

## Optimal Tick Size and Lot Size

Setting optimal tick size and minimum lot size is of interest for exchange officials and regulators.

Let  $K_{jt}^{MIN*}$  and  $Q_{jt}^{MIN*}$  denote optimal tick size and optimal minimum lot size, respectively.

## Optimal Tick Size and Lot Size

Since the scaled optimal quantities  $K_{jt}^{MIN*} \cdot L_{jt}/P_{jt}$  and  $Q_{jt}^{MIN*} \cdot L_{jt}^2 \cdot \sigma_{jt}^2/V_{jt}$  are dimensionless and leverage neutral, the scaling laws for these market frictions are

$$K_{jt}^{MIN*} = \text{const} \cdot \frac{P_{jt}}{L_{jt}}, \quad Q_{jt}^{MIN*} = \text{const} \cdot \frac{V_{jt}}{L_{jt}^2 \cdot \sigma_{jt}^2}.$$

## General Formula for Bid-Ask Spread

Here is a formula for bid-ask spread for the market with frictions:

$$\frac{S_{jt}}{P_{jt}} = \frac{1}{L_{jt}} \cdot s \left( \frac{K_{jt}^{MIN} \cdot L_{jt}}{P_{jt}}, \frac{Q_{jt}^{MIN} \cdot \sigma_{jt}^2 \cdot L_{jt}^2}{V_{jt}} \right).$$

If tick size and minimum lot size have no influence on quoted bid-ask spreads, then the the relationship simplifies to

$$S_{jt}/P_{jt} \sim 1/L_{jt}$$

## General Formula for Trading Patterns

Here are general formulas for trade sizes  $\tilde{X}_{jt}$  and number of trades  $N_{jt}$ :

$$\text{Prob} \left\{ \frac{P_{jt} \cdot \tilde{X}_{jt}}{C \cdot L_{jt}} < z \right\} = F_{jt}^Q \left( z, \frac{K_{jt}^{MIN} \cdot L_{jt}}{P_{jt}}, \frac{Q_{jt}^{MIN} \cdot \sigma_{jt}^2 \cdot L_{jt}^2}{V_{jt}} \right).$$

$$N_{jt} = \sigma_{jt}^2 \cdot L_{jt}^2 \cdot f \left( \frac{K_{jt}^{MIN} \cdot L_{jt}}{P_{jt}}, \frac{Q_{jt}^{MIN} \cdot \sigma_{jt}^2 \cdot L_{jt}^2}{V_{jt}} \right).$$

# Conclusions

There is a growing empirical evidence that the scaling laws discussed above match patterns in financial data, at least approximately.

Future research:

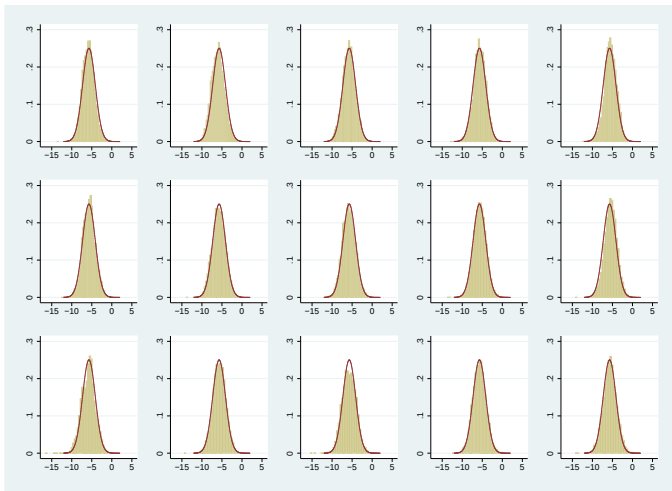
- Checking the validity of invariance predictions in other samples,
- Improving the accuracy of estimates and the triangulation of proportionality constants.

# Literature

- Mark Kritzman, Albert S. Kyle, and Anna A. Obizhaeva, 2016, “A Practitioner’s Guide to Market Microstructure Invariance”, Journal of Portfolio Management.
- Albert S. Kyle and Anna A. Obizhaeva, 2016, “Market Microstructure Invariance: Empirical Hypotheses,” Econometrica.
- Albert S. Kyle and Anna A. Obizhaeva, 2016, “Dimensional Analysis and Market Microstructure Invariance.”

See my web-site *[http : //pages.nes.ru/aobizhaeva/research.html](http://pages.nes.ru/aobizhaeva/research.html)*

# Invariant Log-Normality of Portfolio Transition Order Size



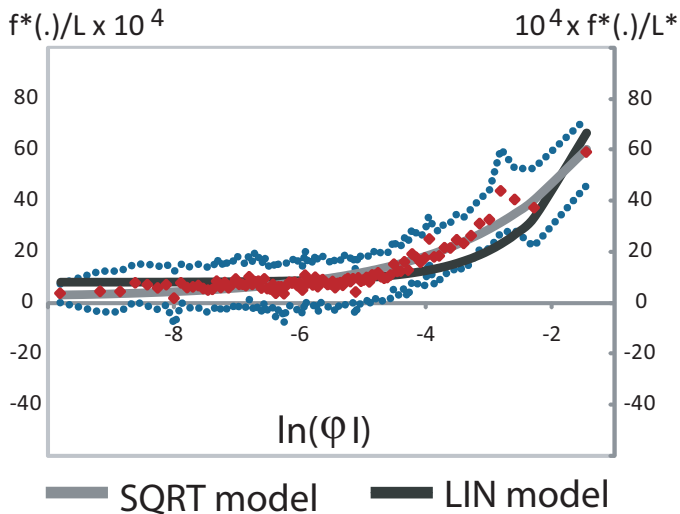
## Distribution of Order Sizes

Invariance theory predicts that distribution of scaled bet sizes will be the same for all assets and times:

$$\ln \left( \frac{|\tilde{Q}|}{V} \cdot [V \cdot P \cdot \sigma]^{2/3} \right).$$

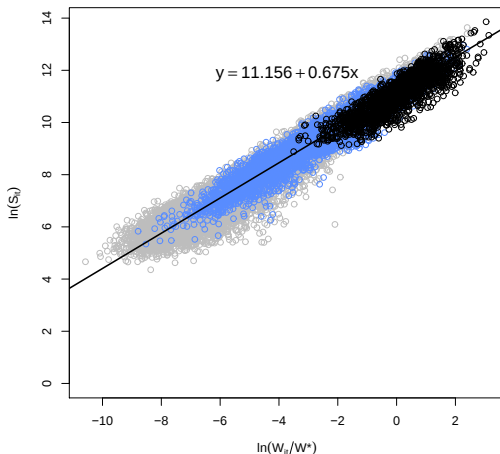
This figure shows distributions for **10 volume/5 volatility groups** for portfolio transitions data are very close to a log-normal with log-variance of 2.53.

# Linear versus Square Root Model

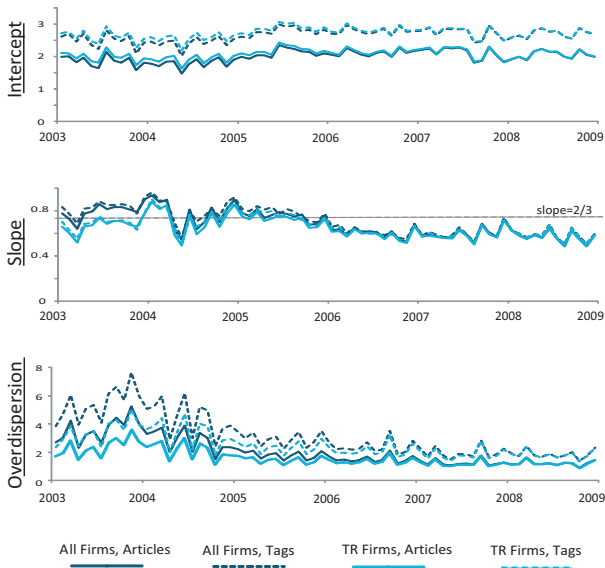


# Switching Points: Korean Data

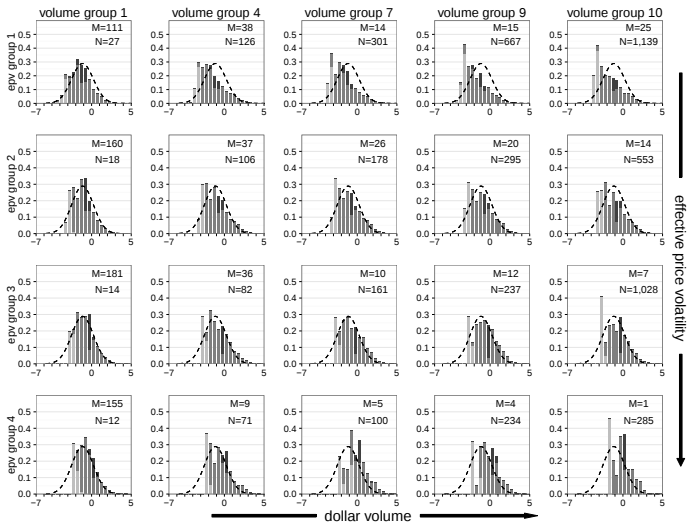
The fitted line for the regression of the number of switching points on trading activity is  $\ln(S_{it}) = 11.156 + 0.675 \cdot \ln(W_{it}/W^*)$ . The invariance-implied slope is  $2/3$ .



# News Articles



# NYSE TAQ Prints, 1993



# Инвариантность Микроструктуры Рынка

Оценка издержек  $\%Cost(V, P, \sigma, Q, T_{liq})$  для заявки  $Q$  и времени ликвидации  $T_{liq}$ :

- Общий случай для времени ликвидации  $T_{liq}$ :

$$\left( \frac{\sigma^2 \cdot C}{P \cdot V} \right)^{1/3} \cdot F \left( \left( \frac{\sigma^2 \cdot C}{P \cdot V} \right)^{1/3} \cdot \frac{P \cdot Q}{C}, \frac{Q}{V \cdot T_{liq}} \right).$$

- Как оценить более точно функцию  $F()$  и константу  $C$ ?  
оценка  $C = \$2000$ ;

# Риск

- Все формулы - это среднее ожидаемое изменения цен при ликвидации позиции под воздействием самих транзакций.
- Но существует также background price movemets, то есть естественное изменение цен без учета транзакции.
- За время до принятия решения о закрытии позиции  $T$  и ее ликвидации  $T_{liq}$  цены изменятся на  $\sigma \cdot \sqrt{T + T_{liq}}$ .

## Другие Сферы Применения

- Издержки: транзакции, стратегии.
- Определение маржинальных требований.
- Определение haircuts для репо-транзакций и других операций с залогом. Если ликвидные бумаги могут быть проданы быстро и с небольшим дискантом, то repo haircuts небольшие.
- Исследование стабильности финансовой системы (например, Office for Financial Research в США)
- Размеры монетарной/курсовой политики, QE, tapering.

Исходя из наших знаний, для всех этих оценок необходимо учитывать ликвидность рынка, размер позиций, скорость их потенциальной ликвидации (и одновременные транзакции других игроков).

## Пример - Дисконт Ликвидности

$$LiquidityDiscount = \%Cost(V, P, \sigma, Q, T_{liq})$$

- $V$  - объем,  $\sigma$  - волатильность,  $P$  - цена,
- $Q$  - размер позиции,  $T_{liq}$  - время ликвидации,
- Экспирация -> автоматическая “бесплатная” ликвидация?
- Дефолт -> необходимость ускоренной ликвидации?

## Пример - ставки РЕПО

$$\text{Haircuts} = \alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{T + T_{liq}} + \%Cost(V, P, \sigma, Q, T_{liq}) + fee$$

- $T$  - срок контракта (O/N?),
- $T_{liq}$  - время ликвидации,  $Q$  - размер позиции,
- $V$  - объем,  $\sigma$  - волатильность,  $P$  - цена,
- $\alpha = 1.96$  - фактор безопасности (safety factor).
- NB: Волатильность может сильно увеличиться при падении цен (leverage effect)

## Вопросы для исследования

- Оценка издержек в зависимости от размера позиций и времени ликвидации (fire sales costs для малых  $T$ ) на российском рынке.
- Время  $T(Q)$  за которое позиция  $Q$  может быть ликвидирована in orderly manner без большого temporary impact.
- Зависимость издержек от структуры рынка, количества участников рынка, их размеров и тд.
- Взаимосвязь между ликвидностью на “близких” рынках (например, облигации того же заемщика).
- Изучение стратегий участников рынка и мониторинг вероятности одновременной ликвидации похожих позиций.