# Об анализе стохастической модели динамики цен с учетом скачков и запаздывания

***И.Е.Полосков***

## Модели

I. Одномерные модели краткосрочных процентных ставок

0. СП Орнштейна-Уленбека (ОУП)

$$dX(t) = \lambda[\mu - X(t)]\,dt + \sigma\,dW(t), \quad \mu, \lambda > 0, \sigma > 0 \text{ – параметры}$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Rendleman–Bartter | $dR(t) = \lambda R(t)\,dt + \sigma R(t)\,dW(t)$ |
| 2. | Васичека | $dR(t) = a\,[b - R(t)]\,dt + \sigma\,dW(t)$ |
| 3. | Ho–Lee | $dR(t) = \lambda(t)\,dt + \sigma\,dW(t)$ |
| 4. | Hull–White | $dR(t) = [\lambda(t) - \alpha R(t)]\,dt + \sigma(t)\,dW(t)$ |
| 5. | Cox–Ingersoll–Ross | $dR(t) = [\lambda(t) - \alpha R(t)]\,dt + \sigma(t)\,\sqrt{R(t)}\,dW(t)$ |
| 6. | Black–Karasinski | $X(t) \sim$ ОУП, $R(t) = e^{X(t)}$ |
| 7. | Black–Derman–Toy | $d\ln(R) = \left[\lambda(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\ln(R)\right]dt + \sigma(t)\,dW(t)$ |

## II. Многомерные модели краткосрочных процентных ставок, связанные с ОУП

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Longstaff–Schwartz | $dX(t) = \left[a(t) - bX(t)\right] dt + \sqrt{X(t)}\, c(t)\, dW_1(t)$, $dY(t) = \left[d(t) - eY(t)\right] dt + \sqrt{Y(t)}\, f(t)\, dW_2(t)$, $dR(t) = \left[\mu X(t) + \lambda Y(t)\right] dt + \sigma(t)\sqrt{Y(t)}\, dW_3(t)$ |
| 2. | Chen | $dR(t) = [\lambda(t) - \alpha(t)]\, dt + \sqrt{R(t)}\,\sigma(t)\, dW(t)$, $d\alpha(t) = [\zeta(t) - \alpha(t)]\, dt + \sqrt{\alpha(t)}\,\sigma(t)\, dW_t$, $d\sigma(t) = [\beta(t) - \sigma(t)]\, dt + \sqrt{\sigma(t)}\,\eta(t)\, dW(t)$ |

## III. Немарковская модель цен облигаций Heath–Jarrow–Morton

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \left[r(t) - \alpha(t,T)\,\theta(t)\right] dt + \alpha(t,T)\, dW(t)\,.$$

## Новые модели

- (Интегро-)Дифференциальные уравнения обыкновенные в частных производных
- С различными типами запаздывания
- С различными формами возмущений (непрерывными и дискретными)

## Основа используемых процедур

- Теория марковских случайных процессов
- (Обобщенные) Уравнения для плотности вероятности, переходной плотности вероятности и функционала плотности вероятности
- Дифференциальные уравнения для моментных функций
- Метод Монте-Карло

## Запаздывания

- Сосредоточенные
- Распределенные
- Постоянные
- Переменные
- Детерминированные
- Случайные
- Независимые от вектора состояния
- Зависимые от вектора состояния

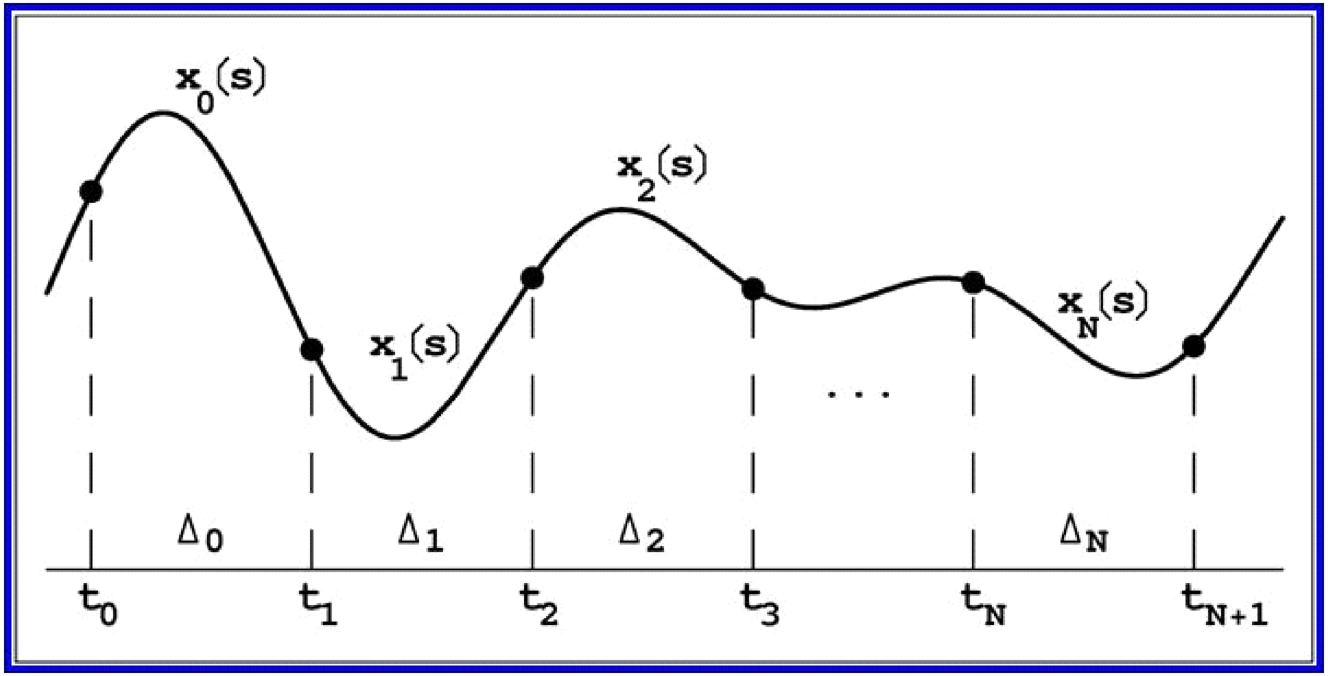
## Источники

- Информационные
- Инерционные
- Технологические
- Транспортные

## Причины

- Конечность скорости передачи на расстояние информации, сигналов, веществ, энергии
- Запаздывание реакции человека
- …

# Методология – расширение пространства состояния



## Обозначения

$$q = 0, 1, 2, \ldots$$

$$s \in [0, \tau], \qquad t_q = t_0 + q \cdot \tau, \qquad s_q = s + t_q,$$

$$\boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s_q), \qquad \boldsymbol{W}'_q(s) = \boldsymbol{W}'(s_q), \qquad \Delta_q = (t_{q-1}, t_q],$$

$$\boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{X}_0, \qquad \boldsymbol{Z}_1 = \mathrm{col}(\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1), \qquad \boldsymbol{Z}_2 = \mathrm{col}(\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2), \ldots,$$

$$\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{W}_0, \qquad \boldsymbol{V}_1 = \mathrm{col}(\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1), \qquad \boldsymbol{V}_2 = \mathrm{col}(\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2), \ldots,$$

$$\boldsymbol{W}'_q(0) = \boldsymbol{W}'_{q-1}(\tau), \qquad \boldsymbol{Y}_q \equiv \boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau) \qquad \text{п.н.},$$

$$\mathrm{col}(\boldsymbol{X}_0, \ldots, \boldsymbol{X}_{N-1}, \boldsymbol{X}_N) = \{X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{0n}, \ldots, X_{N1}, X_{N2}, \ldots, X_{Nn}\}^{\mathrm{T}}.$$

$$\mathcal{E}[d\boldsymbol{W}(t)] = 0, \qquad \mathcal{E}\left[d\boldsymbol{W}(t)\, d\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(t+\theta)\right] = \mathbb{E} \cdot \delta(\theta) \cdot dt$$

## Стохастические функционально-дифференциальные уравнения

◈ ***СДУ с одним постоянным запаздыванием***

$$d\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\tau}(t),t\big)\,dt+G\big(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}(t-\tau),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t),\quad t>t_1,$$
$$d\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\,dt+G\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t),\quad t_0<t\leqslant t_1,$$
$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0$$

◈ ***СДУ с кратными постоянными запаздываниями***

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{X}(t)&=\boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}(t-\tau),\ldots,\boldsymbol{X}(t-\nu\,\tau),t\big)\,dt+\\
&\qquad+G\big(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}(t-\tau),\ldots,\boldsymbol{X}(t-\nu\,\tau),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t),\quad t>t_\nu,\\
d\boldsymbol{X}(t)&=\boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}(t-\tau),\ldots,\boldsymbol{X}(t-(\nu-1)\,\tau),t\big)\,dt+\\
&\qquad+G\big(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}(t-\tau),\ldots,\boldsymbol{X}(t-(\nu-1)\,\tau),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t),\quad t>t_{\nu-1},
\end{aligned}$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$d\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\,dt+G\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t),\quad t_0<t\leqslant t_1,$$
$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0$$

◈ ***Линейные параметрические СДУ нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями***

$$d\boldsymbol{X}(t) = \sum_{\ell=1}^{r} P_{r,r-\ell}(t)\, d\boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau) + \sum_{\ell=0}^{r} Q_{r,r-\ell}(t)\, \boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau)\, dt +$$

$$+\, \boldsymbol{p}_r(t)\, dt + \left[U_r(t) + \sum_{\ell=0}^{r} V_{r,r-\ell}(t) : \boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau)\right] \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t > t_r = t_0 + r\cdot\tau,$$

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0$$

◈ ***Линейные СДУ с переменными запаздываниями***

$$d\boldsymbol{X}(t) = \left[P(t)\,\boldsymbol{X}(t) + Q(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau(t)) + \boldsymbol{c}(t)\right] dt + R(t)\, d\boldsymbol{W}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t_*) = \boldsymbol{X}^*$$

◈ ***Линейные СДУ с кусочно-постоянным запаздываниями***

$$d\boldsymbol{X}(t) = \left[P(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \sum_{\ell=1}^{r} Q_\ell(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau_\ell) + \boldsymbol{c}(t)\right] dt + R(t)\, d\boldsymbol{W}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t_*) = \boldsymbol{X}^*$$

◈ ***Линейные стохастические интегро-дифференциальные уравнения с сосредоточенными и распределенными ограниченными запаздываниями***

$$d\mathbf{X}(t) = \left[P(t)\,\mathbf{X}(t) + Q(t)\,\mathbf{X}(t-\tau) + R(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}\mathbf{X}(s)\,ds\right]dt + H(t)\,d\mathbf{W}(t)$$

◈ ***Линейные СДУ в частных производных с постоянными запаздываниями***

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \alpha\,U(x,t) = \nu\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \beta\,U(x,t-\tau) + \gamma\,V(x,t), \quad x \in (0,1), \; t > t_1 = t_0 + \tau,$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \alpha_0\,U(x,t) = \nu_0\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \gamma_0\,V(x,t), \qquad x \in (0,1),$$

$$\mathcal{E}[V(x,t)] = 0, \qquad \mathcal{E}[V(x,t)\,V(x',t')] = \delta(x-x')\,\delta(t-t'),$$

$$U(x,t_0) = U^0(x), \qquad U(0,t) = U(1,t) = 0,$$

$$m^0(x) = \mathcal{E}\left[U^0(x)\right], \qquad D^0(x,y) = \mathcal{E}\left[\{U^0(x) - m^0(x)\}\{U^0(y) - m^0(y)\}\right].$$

## Детерминированные функционально-дифференциальные уравнения

- ***ОДУ с запаздыаанием***
- ***ДУ в ЧП с запаздыванием***
- ***ОИДУ***
- ***ИДУ в ЧП***

## Другие схемы

- ***Аппроксимация матрицы-функции Коши для линейных СДУ***
- ***Аппроксимация ядра для сведения СИДУ к СДУ***

## Одномерная модель с аддитивными скачками

- *СДУ*

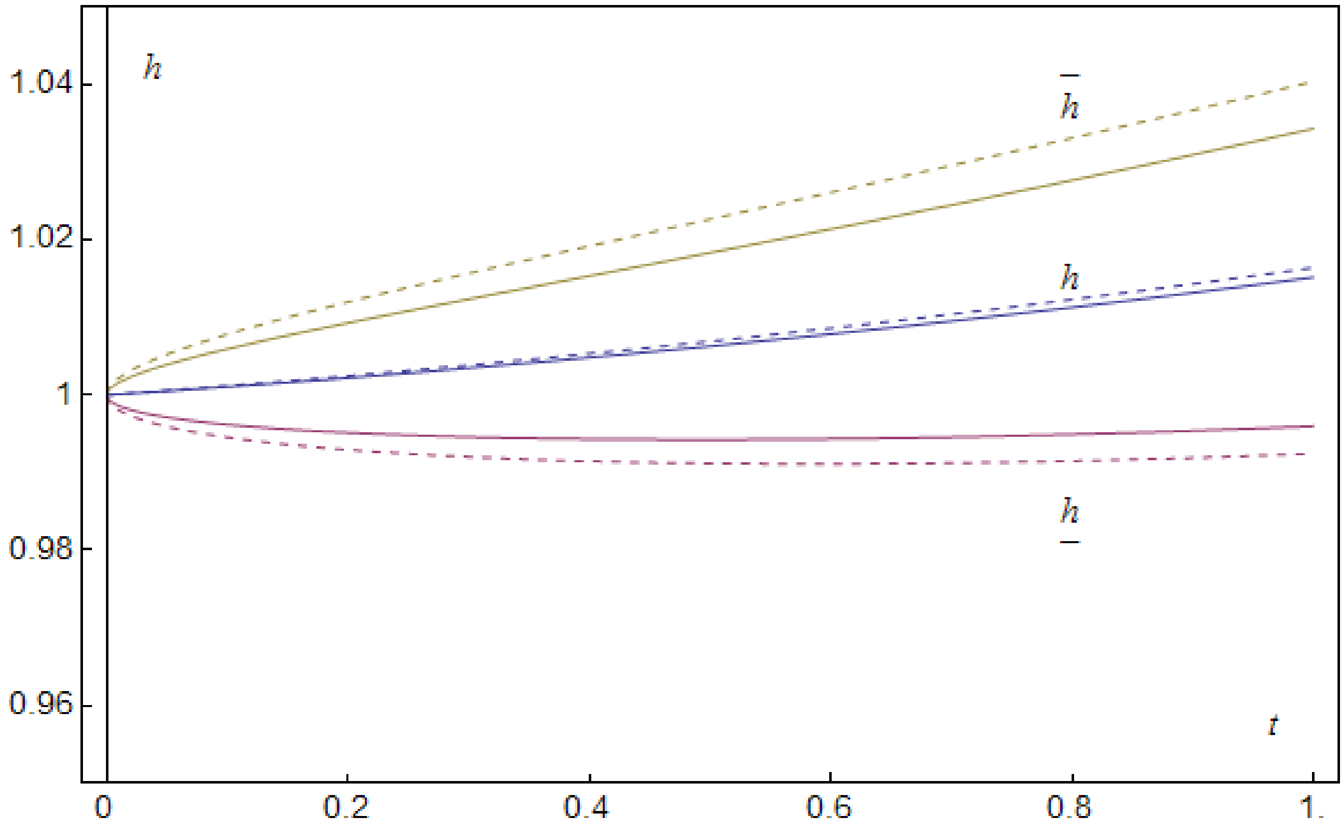
$$\dot{X}(t) = \alpha(t)\,X(t) + \beta(t)\,X(t)\,V(t) + P(t), \qquad X(t_0) = X^0,$$
$$P(t) = \sum A_i\,\delta(t - t_i)$$

- *Интегро-дифференциальное уравнение Колмогорова-Феллера*

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\big[\beta^2\,x^2\,p(x,t)\big]}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big[\big(\alpha + \beta^2/2\big)\,x\,p(x,t)\Big] +$$
$$+\,\mu(t)\left[-p(x,t) + \int_{-\infty}^{+\infty} w(x - x', t)\,p(x', t)\,dx'\right], \quad p(x,t_0) = p_0(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x - x', t)\,dx' = 1.$$

Расчеты производились для трех случаев:
1) скачки отсутствуют;
2) функция $w(z)$ определяется равномернвм распределением;
3) функция $w(z)$ определяется гауссовым распределением.



## Одномерная модель с аддитивными скачками и запаздыванием

- *СДУ*

$$dX(t) = \left[\alpha(t)\,X(t) + \gamma(t)\,X(t-\tau)\right] dt + \beta(t)\,X(t)\,dW_1(t) + \\ + \nu(t)\,X(t-\tau)\,dW_2(t) + dP(t), \quad t > t_1 = t_0 + \tau,$$

$$dX(t) = \alpha_0(t)\,X(t)\,dt + \beta_0(t)\,X(t)\,dW_1(t) + dP(t), \quad t \in (t_0, t_1]$$

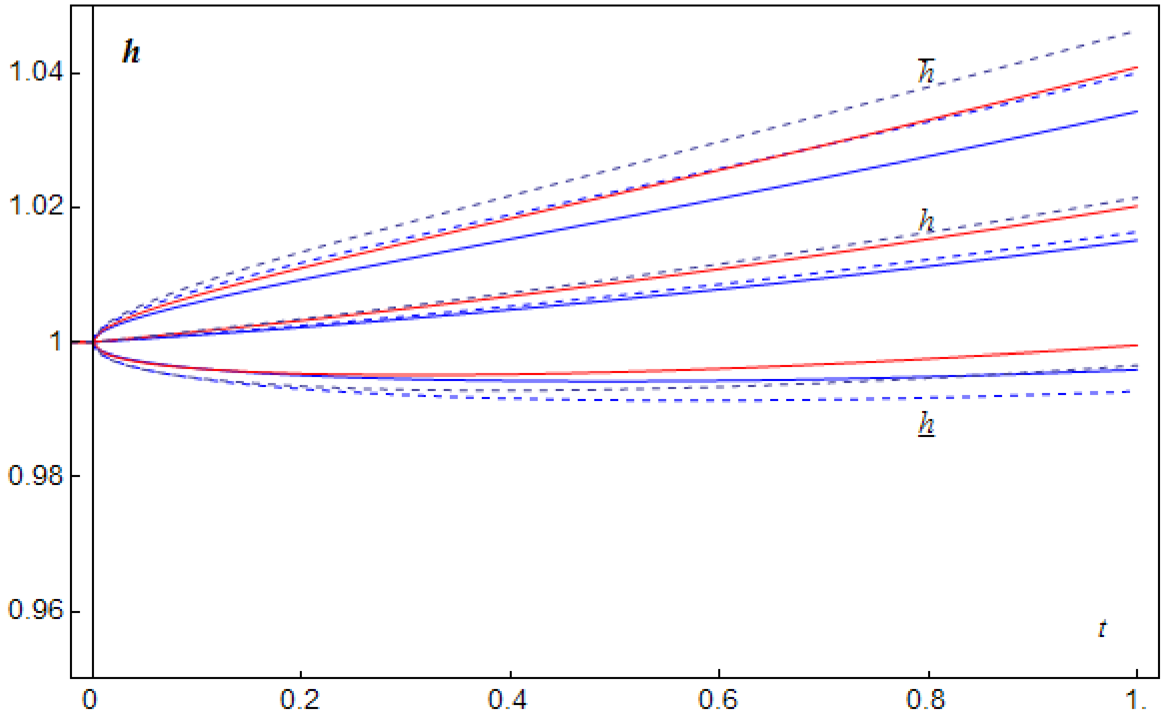
- ***Цепочка интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова-Феллера***

$$\frac{\partial p_N}{\partial s} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\left(\beta_0^2\,x_0^2\,p_N\right)}{\partial x_0^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2\left[\left(\beta_k^2\,x_k^2 + \nu_k^2\,x_{k-1}^2\right)p_N\right]}{\partial x_k^2} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\left(\alpha_0 + \frac{\beta_0^2}{2}\right)x_0\,p_N\right] - \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\alpha_k\,x_k + \frac{\beta_k^2}{2}\,x_k + \gamma_k\,x_{k-1}\right)p_N\right] -$$

$$+\sum_{k=0}^{N}\mu_k\left[-p_N + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(y_0 - y_0')\prod_{q=0,q\neq k}^{N}\delta(x_q - x_q')\,\times\right.$$

$$\left.\times\,w_k(x_k - x_k', s)\,p_N(y_0', x_0', x_1', \ldots, x_N', s)\,dy_0'dx_0'dx_1'\ldots dx_N'\right]$$


h
1.04
1.02
1
0.98
0.96
$\overline{h}$
$h$
$\underline{h}$
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.

## Постоянные запаздывания и дискретно-непрерывные возмущения

Система линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями $\tau = \text{const} > 0$:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \left[\mathbb{Q}(t)\cdot\boldsymbol{X}(t)+\mathbb{R}(t)\cdot\boldsymbol{X}(t-\tau)+\boldsymbol{c}(t)\right] dt+\mathbb{G}(t)\cdot d\boldsymbol{W}(t)+\mathbb{H}(t)\cdot d\boldsymbol{P}(t), \quad t > t_1 = t_0+\tau,$$

$\boldsymbol{X}(t) = \{X_i(t),\ i = \overline{1,n}\}^T$ – вектор состояния;
$\boldsymbol{W}(t) = \{W_i(t),\ i = \overline{1,m}\}^T$ – вектор независимых стандартных случайных винеровских процессов:

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{W}(t)] = 0, \qquad \mathcal{E}\left[\boldsymbol{W}(t_1)\,\boldsymbol{W}^T(t_2)\right] = \mathbb{E}\cdot\min(t_1,t_2);$$

$\boldsymbol{P}(t) = \{P_i(t),\ i = \overline{1,r}\}^T$ – вектор независимых составных случайных пуассоновских процессов, представляющих собой последовательности случайных импульсов прямоугольного вида постоянной ширины:

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} V_{ij}\cdot\delta(t-t_{ij}),$$

причем случайные амплитуды импульсов $V_{ij}$ имеют плотности вероятности $p_{Vi}(v)$, сами импульсы появляются с постоянными интенсивностями $\lambda_i > 0$, а их число на полуотрезке $(t_0, t]$ равно $N_i(t)$. Здесь и далее $T$ – символ транспонирования матрицы, $\mathcal{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания, $\mathbb{E}$ – единичная матрица.

Предполгается, что векторные случайные процессы $\boldsymbol{W}(t)$ и $\boldsymbol{P}(t)$ независимы. На интервале $(t_0, t_1]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе СДУ без запаздывания:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \left[\mathbb{Q}_0(t)\cdot\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\right]dt + \mathbb{G}_0(t)\cdot d\boldsymbol{W}(t) + \mathbb{H}_0(t)\cdot d\boldsymbol{P}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0.$$

$$\mathbb{Q}(t) = \{q_{ij}(t)\}, \qquad \mathbb{Q}_0(t) = \{q_{0ij}(t)\}, \qquad \mathbb{G}(t) = \{g_{ij}(t)\}, \qquad \mathbb{G}_0(t) = \{g_{0ij}(t)\},$$

$$\mathbb{H}(t) = \{h_{ij}(t)\} = \{\boldsymbol{H}_j(t)\}, \qquad \mathbb{H}_0(t) = \{h_{0ij}(t) = \{\boldsymbol{H}_{0j}(t)\},$$

$$\mathbb{R}(t) = \{r_{ij}(t)\} \qquad \boldsymbol{c}(t) = \{c_i(t)\}, \qquad \boldsymbol{c}_0(t) = \{c_{0i}(t)\}$$

– известные непрерывные матрицы-функции и векторы-функции.

В начальный момент времени $t_0$ для вектора $\boldsymbol{X}$ известны вектор математических ожиданий и ковариационная матрица:

$$\boldsymbol{m}^0 = \mathcal{E}\left[\boldsymbol{X}^0\right], \qquad \mathbb{C}^0 = \mathcal{E}\left[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)^T\right].$$

**Задачей исследования** является построение систем обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания для компонентов вектора средних и ковариационной матрицы

$$\boldsymbol{m}(t) = \mathcal{E}[\boldsymbol{X}(t)], \qquad \mathbb{C}(t) = \mathcal{E}\left[\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}^T\right].$$

◈ **Расширение пространства**

**0°.** $\Delta_0$

$$dY(s) = 0, \quad Y(0) = X^0,$$

$$dX_0(s) = \left[\mathbb{Q}_0(s)\cdot X_0(s) + c_0(s)\right] ds + \mathbb{G}_0(s)\cdot dW_0(s) +$$

$$+ \mathbb{H}_0(s)\cdot dP_0(s), \quad X_0(0) = X^0.$$

**1°.** $\Delta_0,\ \Delta_1$

$$dY(s) = 0, \quad Y(0) = X^0,$$

$$dX_0(s) = \left[\mathbb{Q}_0(s)\cdot X_0(s) + c_0(s)\right] ds + \mathbb{G}_0(s)\cdot dW_0(s) +$$

$$+ \mathbb{H}_0(s)\cdot dP_0(s), \quad X_0(0) = X^0,$$

$$dX_1(s) = \left[\mathbb{Q}_1(s)\cdot X_1(s) + \mathbb{R}_1(s)\cdot X_0(s) + c_1(s)\right] ds +$$

$$+ \mathbb{G}_1(s)\cdot dW_1(s) + \mathbb{H}_1(s)\cdot dP_1(s), \quad X_1(0) = X_0(\tau).$$

……………………………………………

**k°.** $\Delta_0,\ \Delta_1,\ \dots,\ \Delta_k$

$$d\boldsymbol{Y}(s) = 0, \quad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,$$

$$d\boldsymbol{X}_0(s) = \left[\mathbb{Q}_0(s)\cdot\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s)\right]ds + \mathbb{G}_0(s)\cdot d\boldsymbol{W}_0(s) +$$

$$+\,\mathbb{H}_0(s)\cdot d\boldsymbol{P}_0(s), \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,$$

$$d\boldsymbol{X}_1(s) = \left[\mathbb{Q}_1(s)\cdot\boldsymbol{X}_1(s) + \mathbb{R}_1(s)\cdot\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_1(s)\right]ds +$$

$$+\,\mathbb{G}_1(s)\cdot d\boldsymbol{W}_1(s) + \mathbb{H}_1(s)\cdot d\boldsymbol{P}_1(s), \quad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau),$$

… … … … … …

$$d\boldsymbol{X}_k(s) = \left[\mathbb{Q}_k(s)\cdot\boldsymbol{X}_k(s) + \mathbb{R}_k(s)\cdot\boldsymbol{X}_{k-1}(s) + \boldsymbol{c}_k(s)\right]ds +$$

$$+\,\mathbb{G}_k(s)\cdot d\boldsymbol{W}_k(s) + \mathbb{H}_k(s)\cdot d\boldsymbol{P}_k(s), \quad \boldsymbol{X}_k(0) = \boldsymbol{X}_{k-1}(\tau).$$

……………………………………………

$$t_q = t_0 + q\cdot\tau,\quad q = 0,1,2,\dots,N,\dots,\quad s\in[0,\tau],\quad s_q = s + t_q,\quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}],$$

$$\boldsymbol{U}_q^+(s) = \boldsymbol{U}(s_q),\qquad \boldsymbol{U}\to\boldsymbol{X},\boldsymbol{W},\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{Y}(s)\equiv\boldsymbol{X}^0,$$

◈ **Обозначения**

$$\mathbb{Q}_{qk}^+(s) = \begin{cases} \mathbb{Q}_{qk}(s+t_q), & 0\leqslant k\leqslant q\leqslant\kappa,\\ \mathbb{Q}_{\kappa,k-q+\kappa}(s+t_q), & q>\kappa,\quad q-\kappa\leqslant k\leqslant q,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

$$\mathbb{R}_{qk}^+(s) = \begin{cases} \mathbb{R}_q(s+t_q), & 0\leqslant k = q\leqslant\kappa,\\ \mathbb{R}_\kappa(s+t_q), & k=q>\kappa,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}\qquad \mathbb{R}\to\mathbb{G},\mathbb{H},$$

$$\boldsymbol{c}_q^+(s) = \begin{cases} \boldsymbol{c}_q(s+t_q), & 0\leqslant q\leqslant\kappa,\\ \boldsymbol{c}_\kappa(s+t_q), & q>\kappa,\end{cases}\qquad \bar{\boldsymbol{X}}^{[M]}(s) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{Y}(s),\boldsymbol{X}_q^+(s),\ q=\overline{0,M}\big),$$

$$\bar{\boldsymbol{U}}^{[M]}(s) = \mathrm{col}\big(0,\boldsymbol{U}_q^+(s),\ q=0,1,\dots,M\big),\quad \boldsymbol{U}\to\boldsymbol{W},\boldsymbol{P},\boldsymbol{c},$$

$$\bar{\mathbb{R}}^{[M]}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mathbb{R}_{00}^+(s) & \mathbb{R}_{01}^+(s) & \dots & \mathbb{R}_{0M}^+(s)\\ 0 & \mathbb{R}_{10}^+(s) & \mathbb{R}_{11}^+(s) & \dots & \mathbb{R}_{1M}^+(s)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \mathbb{R}_{M0}^+(s) & \mathbb{R}_{M1}^+(s) & \dots & \mathbb{R}_{MM}^+(s)\end{bmatrix},\quad \mathbb{R}\to\mathbb{Q},\mathbb{G},\mathbb{H},$$

$$\boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau),\quad \boldsymbol{W}_q(0) = \boldsymbol{W}_{q-1}(\tau),\quad \boldsymbol{P}_q(0) = \boldsymbol{P}_{q-1}(\tau).$$

### Схема решения

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) $\{\Delta_k,\ k = 0, 1, 2, ...\}$. Расширенный вектор состояния $\bar{\boldsymbol{X}}^{[k]}(s)$ удовлетворяет системе СДУ:

$$d\bar{\boldsymbol{X}}^{[k]}(s) = \left[\,\bar{\mathbb{Q}}^{[k]}(s)\cdot\bar{\boldsymbol{X}}^{[k]}(s) + \bar{\boldsymbol{c}}^{[k]}(s)\,\right]\cdot ds + \\ + \bar{\mathbb{G}}^{[k]}(s)\cdot d\bar{\boldsymbol{W}}^{[k]}(s) + \bar{\mathbb{H}}^{[k]}(s)\cdot d\bar{\boldsymbol{P}}^{[k]}(s), \quad 0 < s \leqslant \tau$$

с начальными условиями

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{[k]}(0) = \begin{cases} \operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{X}^0\big), & k = 0, \\ \operatorname{col}\big(\bar{\boldsymbol{X}}^{[k-1]}(0), \boldsymbol{X}^{+}_{k-1}(\tau)\big), & k > 0. \end{cases}$$

Итак, получена цепочка систем линейных СДУ для расширенных векторов состояния $\bar{\boldsymbol{X}}^{[0]}(s)$, $\bar{\boldsymbol{X}}^{[1]}(s)$, $\bar{\boldsymbol{X}}^{[N]}(s)$, ..., $\bar{\boldsymbol{X}}^{[2]}(s)$, ... увеличивающейся размерности $L_k = n\,(k+2)$, $k = 0, 1, 2, ..., N, ...$, и одинаковой структуры без запаздывания, для дальнейшего исследования которой можно применить различные пригодные для данного класса уравнений методы.

## Уравнения для моментов

Построенную последовательность систем линейных СДУ без запаздывания можно использовать для получения новой цепочки уравнений – ОДУ для первых моментов (математических ожиданий и ковариационных матриц) векторов $\bar{\boldsymbol{X}}^{[0]}(s)$, $\bar{\boldsymbol{X}}^{[1]}(s)$, $\bar{\boldsymbol{X}}^{[N]}(s)$, ..., $\bar{\boldsymbol{X}}^{[2]}(s)$, ... .

Выясним структуру этих систем. Обозначим:

$$\bar{\boldsymbol{m}}^{[k]}(s) = \mathcal{E}\left[\bar{\boldsymbol{X}}^{[k]}(s)\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_Y(s) \\ \boldsymbol{m}_0^+(s) \\ \boldsymbol{m}_1^+(s) \\ \dots \\ \boldsymbol{m}_k^+(s) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbb{C}}^{[k]}(s) = \mathcal{E}\left[\left\{\bar{\boldsymbol{X}}^{[k]}(s) - \bar{\boldsymbol{m}}^{[k]}(s)\right\}\left\{\bar{\boldsymbol{X}}^{[k]}(s) - \bar{\boldsymbol{m}}^{[k]}(s)\right\}^T\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{YY}(s) & \mathbb{C}_{YX_0}(s) & \mathbb{C}_{YX_1}(s) & \dots & \mathbb{C}_{YX_k}(s) \\ \mathbb{C}_{X_0Y}(s) & \mathbb{C}_{X_0X_0}(s) & \mathbb{C}_{X_0X_1}(s) & \dots & \mathbb{C}_{X_0X_k}(s) \\ \mathbb{C}_{X_1Y}(s) & \mathbb{C}_{X_1X_0}(s) & \mathbb{C}_{X_1X_1}(s) & \dots & \mathbb{C}_{X_1X_k}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{C}_{X_kY}(s) & \mathbb{C}_{X_kX_0}(s) & \mathbb{C}_{X_kX_1}(s) & \dots & \mathbb{C}_{X_kX_k}(s) \end{bmatrix}.$$

Вектор $\boldsymbol{m}_k(t)$ и матрица $\mathbb{C}_k(t)$ – соответствующие блоки $\bar{\boldsymbol{m}}^{[k]}(s)$ и $\bar{\mathbb{C}}^{[k]}(s)$.

Отсюда можно увидеть, что для любого $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N,\ \ldots$ структуры соответствующих систем ОДУ будут иметь вид:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{m}}}^{[k]}(s) = \bar{\mathbb{Q}}^{[k]}(s)\cdot\bar{\boldsymbol{m}}^{[k]}(s) + \bar{\boldsymbol{c}}^{[k]}(s) \ + \bar{\mathbb{H}}^{[k]}(s)\cdot\bar{\boldsymbol{m}}_P^{[k]}, \quad 0 < s \leqslant \tau,$$

$$\dot{\bar{\mathbb{C}}}^{[k]}(s) = \bar{\mathbb{Q}}^{[k]}(s)\cdot\bar{\mathbb{C}}^{[k]}(s) + \left[\bar{\mathbb{Q}}^{[k]}(s)\cdot\bar{\mathbb{C}}^{[k]}(s)\right]^T + \bar{\mathbb{G}}^{[k]}(s)\cdot\bar{\mathbb{G}}^{[k]T}(s) + \hat{\bar{\mathbb{H}}}^{[k]}(s)\cdot\hat{\bar{\mathbb{H}}}^{[k]T}(s),$$

где

$$\bar{\boldsymbol{m}}_P^{[k]} = \mathrm{col}\big(\lambda_\ell^+\cdot m_{P\ell}^+\,,\ \ell=\overline{1,\ r\,(k+2)}\,\big), \quad m_{P\ell}^+ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_\ell^+\, p_{V\ell}^+(v_\ell^+)\, dv_\ell^+,$$

$$p_{V\ell}^+(v_\ell^+) = p_{Vi}(v_i), \quad \lambda_\ell^+ = \lambda_i, \quad i = \mathrm{mod}(\ell, r), \quad \ell > r.$$

$$\bar{\mathbb{H}}^{[k]}(s) = \{\hat{\boldsymbol{H}}_\ell^{[k]},\ \ell=\overline{1,\ r\,(k+2)}\,\}, \quad \hat{\boldsymbol{H}}_\ell^{[k]} = \sqrt{\lambda_\ell^+}\cdot\boldsymbol{H}_\ell^{[\kappa]}\cdot\sigma_{P\ell}^+,$$

$$\sigma_{P\ell}^{+2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(v_\ell^+ - m_{P\ell}^+)^2\, p_{V\ell}^+(v_\ell^+)\, dv_\ell^+.$$

Начальными условиями для математических ожиданий и ковариаций будут:

$$\bar{\boldsymbol{m}}^{[k]}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}_0(\tau) \\ \dots \\ \boldsymbol{m}_{k-1}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbb{C}}^{[k]}(0) = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^0 & \mathbb{C}^0 & \mathbb{C}_{YX_0}(\tau) & \dots & \mathbb{C}_{YX_{k-1}}(\tau) \\ \mathbb{C}^0 & \mathbb{C}^0 & \mathbb{C}_{YX_0}(\tau) & \dots & \mathbb{C}_{YX_{k-1}}(\tau) \\ \mathbb{C}_{X_0Y}(\tau) & \mathbb{C}_{YX_0}(\tau) & \mathbb{C}_{X_0X_0}(\tau) & \dots & \mathbb{C}_{X_0X_{k-1}}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{C}_{X_{k-1}Y}(\tau) & \mathbb{C}_{X_{k-1}Y}(\tau) & \mathbb{C}_{X_{k-1}X_0}(\tau) & \dots & \mathbb{C}_{X_{k-1}X_{k-1}}(\tau) \end{bmatrix}.$$

## Выгоды применения:

- **Сведение к уравнениям без запаздывания**
- **Один и тот же временной сегмент**
- **Обычные численные интеграторы для ОДУ**
- **Ненужность специальных алгоритмов для решения ДУсОА и хранения предыстории**
- **Простота алгоритмов и быстрота реализации**
- **Комбинирование с методом Монте-Карло**
- **Возможность ускорения расчетов на основе совмещения** Math **с** F/C/Pascal

# Спасибо за внимание!